משפט הפונקציות הסתומות:

תהי $f(x,y)$ מוגדרת בסביבה של (x_0,y_0). נניח כי

$g(x,y)=h(x,y)$

$\underbrace{g(x,y)-h(x,y)}_{f(x,y)}=0$

1. $f(x_0,y_0)=0$
2. $f(x,y)$ גזירה רציפות בסביבה של (x_0,y_0).
3. $f_y(x_0,y_0)\neq 0$.

אז קיימים $\delta_1,\delta_2>0$ כך שקיימת פונקציה יחידה $y(x)$ המוגדרת ב-$(x_0-\delta_1,x_0+\delta_1)$ כך שמתקיים

א. $f(x,y(x))=0$ לכל $x_0-\delta_1<x<x_0+\delta_1$

ב. הגרף של $y(x)$ מוכל בתוך $(x_0-\delta_1,x_0+\delta_1)\times(y_0-\delta_2,y_0+\delta_2)$, כלומר $y_0-\delta_2<y(x)<y_0+\delta_2$ לכל $x_0-\delta_1<x<x_0+\delta_1$

פונקציה יחידה אז מקיימת גם:

(i) $y(x_0)=y_0$

(ii) $y(x)$ גזירה רציפות בסביבה של x_0 ומתקיים

$$y'(x_0)=-\frac{f_x(x_0,y_0)}{f_y(x_0,y_0)}$$

הערה: משוואת הישר המשיק לגרף של $y(x)$

ב- x_0 היא

$$y = \underbrace{y_0}_{y(x_0)} - \frac{f_x(x_0,y_0)}{f_y(x_0,y_0)}(x-x_0)$$

$$= y(x_0) + y'(x_0)(x-x_0)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} b\neq 0 \\ f_y\neq 0 \end{array} \quad \underbrace{ax+by+c}_{f(x,y)}=0 \qquad y=\frac{c-ax}{b}}$$

הגדרה: $f(x,y(x))=0$

פונ' של משתנה אחד

$$\left(f(x,y(x))\right)' = (0)' = 0$$

$$f_x(x,y(x))\cdot(x)' + f_y(x,y(x))\cdot y'(x) = 0$$

$$f_x(x_0,y(x_0)) + f_y(x_0,y(x_0))\,y'(x_0) = 0$$

$$y'(x) = -\frac{f_x(x,y(x))}{f_y(x,y(x))}$$

$$y'(x_0) = -\frac{f_x(x_0,y(x_0))}{f_y(x_0,y(x_0))} = -\frac{f_x(x_0,y_0)}{f_y(x_0,y_0)}$$

נגזרת שנייה

את זאת $f(x,y)$ גזירה פעמיים מרציפות?

$$\left(f_{xx}(x_0,y(x_0))\cdot 1 + f_{xy}(x_0,y(x_0))\cdot y'(x_0)\right) +$$

$$+\left(f_{yx}(x_0,y(x_0))\cdot 1 + f_{yy}(x_0,y(x_0))\cdot y'(x_0)\right)y'(x_0) + \underbrace{f_y(x_0,y(x_0))}_{\neq 0}\,y''(x_0) = 0$$

ונסמן לחלק זרת $(x_0)''y$.

הנקרין תקף אזק $f(x,y)$ גזירה מרחבית

בקצה סדר מינימום מסמנת (y_0,x_0).

מספר הפונקציות השתנות, 3 משתנים:

תהי $f(x,y,z)$ פונקציה המוגדרת מסמנה

של (x_0,y_0,z_0). צנית כי:

1. $f(x_0,y_0,z_0)=0$.

2. $f(x,y,z)$ גזירה מרחבית מסמנה

של (x_0,y_0,z_0).

3. $f_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$.

אזי קיימים $\delta_1,\delta_2>0$ עם שקיימת פונקציה

יחידה $z(x,y)$ המוגדרת מ-

$$(x_0-\delta_1,x_0+\delta_1)\times(y_0-\delta_1,y_0+\delta_1)=\left\{(x,y)\,\middle|\,\begin{array}{l}x_0-\delta_1<x<x_0+\delta_1\\ y_0-\delta_1<y<y_0+\delta_1\end{array}\right\}$$

ומורה

1. $f(x,y,z(x,y))=0$ לכל

$(x,y)\in(x_0-\delta_1,x_0+\delta_1)\times(y_0-\delta_1,y_0+\delta_1)$

2. הגרף של $z(x,y)$ מוכל בתימה

$(x_0-\delta_1,x_0+\delta_1)\times(y_0-\delta_1,y_0+\delta_1)\times(z_0-\delta_2,z_0+\delta_2)$

$z_0-\delta_2 < z(x,y) < z_0+\delta_2$ שלומר

$(x,y)\in(x_0-\delta_1, x_0+\delta_1)\times(y_0-\delta_1, y_0+\delta_1)$ תמורה

הערה: תמורה קמורה A,B,C

$A\times B=\{(x,y) \mid x\in A, y\in B\}$

$A\times B\times C=\{(x,y,z) \mid x\in A, y\in B, z\in C\}$

סוגנ ציה תחוקה ז מקיימת בק

(i) $z(x_0,y_0)=z_0$.

(ii) $z(x,y)$ גזירה מרבי מתמימה

שלם (x_0,y_0) ומתקיים ב

$$z_x(x_0,y_0)=-\frac{f_x(x_0,y_0,z_0)}{f_z(x_0,y_0,z_0)}$$

$$z_y(x_0,y_0)=-\frac{f_y(x_0,y_0,z_0)}{f_z(x_0,y_0,z_0)}.$$

הערה: משוואת המישור המשיק לגרף שלם

$z(x,y)$ ב- (x_0,y_0) הינו

$$z=z_0\underbrace{\left(-\frac{f_x(x_0,y_0,z_0)}{f_z(x_0,y_0,z_0)}\right)}_{z_x(x_0,y_0)}(x-x_0)\underbrace{\left(-\frac{f_y(x_0,y_0,z_0)}{f_z(x_0,y_0,z_0)}\right)}_{z_y(x_0,y_0)}(y-y_0)$$

הוכחה: $f(x,y,z(x,y))=0$

נגזור חלקית לפי x ונקבל משוואה שרשרת

$$f_x(x_0,y_0,\underset{z_0}{z(x_0,y_0)})\cdot 1+f_y(x_0,y_0,\underset{z_0}{z(x_0,y_0)})\cdot 0+$$
$$+f_z(x_0,y_0,\underset{z_0}{z(x_0,y_0)})\cdot z_x(x_0,y_0)=0$$

$$z_x(x_0,y_0)=-\frac{f_x(x_0,y_0,z_0)}{f_z(x_0,y_0,z_0)}$$

דוגמה: נתון כל אל

$$5x^2y^2+3x^3yz+z^3xy=5$$

הראו כי אפשר לחלץ $z(x,y)$ מסביבת הנקודה $(1,1)$ (כלומר קיימת $z(x,y)$ הגזירה מגזירה סתומה, הגזירה מסביבה של $(1,1)$) ומצאו את הנגזרות החלקיות שלה ב- $(1,1)$.

פתרון: נתבונן כל אל

$$5x^2y^2+3x^3yz+z^3xy-5=0$$

ונסמן $f(x,y,z)=5x^2y^2+3x^3yz+z^3xy-5$.

$f(x,y,z)$ מתלבנים לכן נגזר הרבים מכל נקודה במרחב.

נציב $(1,1)$ לתוך המשוואה

$$5\cdot 1^2\cdot 1^2+3\cdot 1^2\cdot 1\cdot z+z^3\cdot 1\cdot 1-5=0$$

$$z(3+z^2)=3z+z^3=0$$

לכן $z=0$, ו- $(x_0,y_0,z_0)=(1,1,0)$

$x_0 \quad y_0 \quad z_0$

$f_x(x,y,z)=10xy^2+9x^2yz+z^3y,\quad f_x(1,1,0)=10$

$f_y(x,y,z)=10x^2y+3x^3z+z^3x,\quad f_y(1,1,0)=10$

$f_z(x,y,z)=3x^3y+3z^2xy,\quad f_z(1,1,0)=3\neq 0$

לפי משפט הפונ' הסתומות

לכן קיימת פונ' דיפ' $z(x,y)$ המוגדרת

מסביבה של $(1,1)$ שבה מרכיבות

מסומנת $(1,1)$, מקיימת $z(1,1)=0$,

וגם

$$z_x(1,1)=-\frac{f_x(1,1,0)}{f_z(1,1,0)}=-10/3$$

$$z_y(1,1)=-\frac{f_y(1,1,0)}{f_z(1,1,0)}=-10/3$$

גם מקיים

ש-

$z_x(1,1)=z_y(1,1)$

נוסף: חשב את $z_{xx}(1,1)$:

$$5x^2y^2+3x^3yz+z^3xy-5=0$$

נגזור לפי z ל- $z(x,y)$.

$$5x^2y^2+\left(3x^3y\,z(x,y)\right)+\left(z(x,y)^3xy\right)-5=0$$

נגזור חלקית לפי x

$$10xy^2+\left(9x^2y\,z(x,y)+3x^3y\,z_x(x,y)\right)+$$

$$+\left(3\,z(x,y)^2\,z_x(x,y)\,xy+z(x,y)^3y\right)=0$$

$$10+3z_x(1,1)=0$$

$$z_x(1,1)=-10/3$$

באופן דומה, ע"י גזירה חלקית שני לפי y, והצבת $(1,1)$, מקבלים כי

$$z_y(1,1)=-10/3.$$

נגזור חלקית לפי x ולפי

$$10y^2+\left(18xy\,z(x,y)+9x^2y\,z_x(x,y)\right)+\left(9x^2y\,z_x(x,y)+\right.$$

$$\left.+3x^3y\,z_{xx}(x,y)\right)+\left(6z(x,y)\cdot z_x(x,y)^2xy+\right.$$

$$\left.+3z(x,y)^2z_{xx}(x,y)\cdot xy+3z(x,y)^2z_x(x,y)\cdot y\right)+$$

$$+3z(x,y)^2z_x(x,y)\cdot y=0$$

נציב $(1,1)$ ונזכר $z(1,1)=0$.

$$10+0+9\cdot\left(-10/3\right)+9\left(-10/3\right)+3z_{xx}(1,1)+0+$$

$$+0+0+0=0$$

$$z_{xx}(1,1)=50/3$$